ULB Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : Guillaume Dujardin
Assistants : Hussein Cheikh-Ali et William Hautekiet

Exercices de Calcul Différentiel et Intégral 2 - 2019/2020

Séance 3 - Séries de fonctions

Exercice 1. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose*

$$u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction u_n est 2π-périodique.

b) Montrer que pour tout compact $K \subset]0, 2\pi[$, il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que

$$K \subset [\alpha, 2\pi - \alpha] \subset]0, 2\pi[.$$

c) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur tout compact de $]0, 2\pi[$. La convergence de cette série est-elle normale sur l'un de ces compacts ?

d) Montrer que la somme de cette série est une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 2. *Soit $\beta > 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$u_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\beta n}\cos(nx) \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer[1] que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n^{(p)}\|_\infty = n^p e^{-\beta n}.$$

c) En déduire que la somme S de la série de terme général u_n définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout $p \in \mathbb{N}$ la fonction $S^{(p)}$ comme la somme d'une série de fonctions.

Exercice 3. Règle de D'Alembert *On se donne une suite complexe (a_n) qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On suppose que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell \in [0, +\infty].$$

Nous allons montrer que, dans ce cas, le rayon R de la série de puissances $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est exactement $1/\ell$.

1. avec la convention que $0^0 = 1$ lorsque $p = n = 0$.

a) On suppose que $\ell = 0$. *Montrer que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_n|^{1/n} \leq |a_{N_\varepsilon}|^{1/n} \varepsilon^{\frac{n-N\varepsilon}{n}}.$$

En déduire que $\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 0$, *puis que* $R = +\infty$.

b) On suppose que $\ell \in]0, +\infty[$. *Montrer que*

$$\forall \varepsilon \in]0, \ell[, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad |a_{N_\varepsilon}|^{1/n} (\ell - \varepsilon)^{\frac{n-N\varepsilon}{n}} \leq |a_n|^{1/n} \leq |a_{N_\varepsilon}|^{1/n} (\ell + \varepsilon)^{\frac{n-N\varepsilon}{n}}.$$

En déduire que la suite $(|a_n|^{1/n})_{n\geq 1}$ *converge vers* ℓ, *puis que* $R = 1/\ell$.

c) On suppose que $\ell = +\infty$. *Montrer que*

$$\forall A > 0, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall n \geq N_A, \quad |a_{N_A}|^{1/n} A^{\frac{n-N_A}{n}} \leq |a_n|^{1/n}.$$

En déduire que $(|a_n|^{1/n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *converge vers* $+\infty$, *puis que* $R = 0$.

Exercice 4. *Déterminer le rayon de la série de puissances* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *lorsque les nombres complexes* a_n *vérifient les propriétés suivantes :*

a) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite* $\ell \in \mathbb{C}^\star$.

b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est périodique.*

c) Pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{n^n}{n!}$.

d) Pour $0 < a < b$, *et* $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = a^n$ *et* $a_{2n+1} = b^n$.

e) Pour $n \geq 2$, $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.

f) Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = e^{\sqrt{n}}$.

g) Pour $n \geq 1$, $a_n = (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$.

h) Pour $n \geq 1$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.

i) Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.

Exercice 5. *On fixe* $d \in \mathbb{N}^\star$. *On se donne* $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. *On considère la série de puissances* $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n z^n$. *Déterminer le rayon de cette série de puissances lorsque*

a) La matrice A *est diagonale.*

b) La matrice A *est diagonalisable.*

c) La matrice A *est triangulaire.*

d) La matrice A *est quelconque dans* $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Exercice 6. *Pour* $\alpha > 0$, *on définit la série de fonctions de terme général*

$$u_n(x) = e^{-n^\alpha} e^{inx},$$

pour $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *définit une fonction* 2π*-périodique de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et exprimer les dérivées de* S *comme la somme d'une série.*

b) On suppose $\alpha \geq 1$. *Montrer que la série de Taylor de* S *en* 0 *converge vers* S *sur un voisinage de* 0. *En déduire que* S *est réelle-analytique.*

c) On suppose que $\alpha < 1$. *Montrer que le rayon de la série de Taylor de* S *en* 0 *est nul.*